

# Medidas de dispersão

Dr. Nielsen Castelo Damasceno Dantas

Slide 8

# Introdução

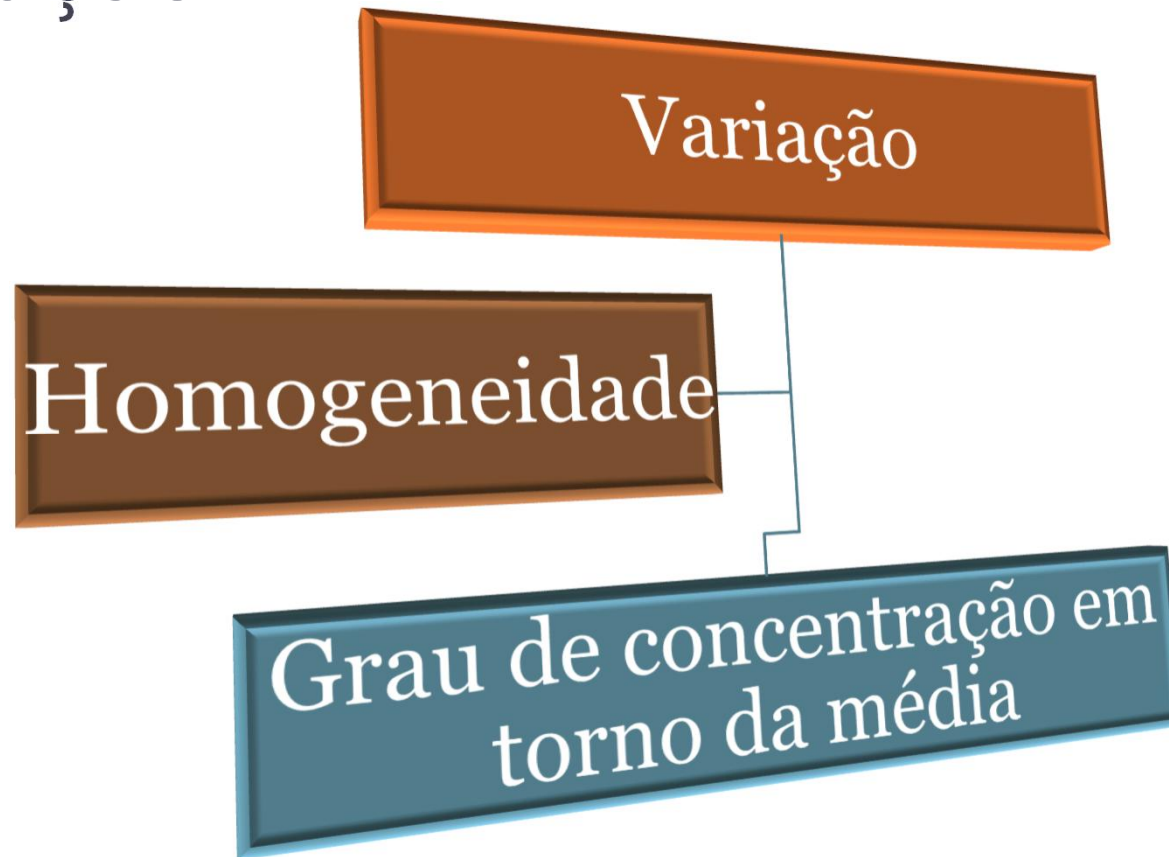
- Medida de variabilidade.
- Medir o grau de variabilidade dos valores observados.

Empregado A: 70, 71, 69, 70, 70  $\rightarrow \bar{x} = 70$

Empregado B: 60, 80, 70, 62, 83  $\rightarrow \bar{x} = 71$

Qual é o melhor empregado?

# Introdução



# Introdução

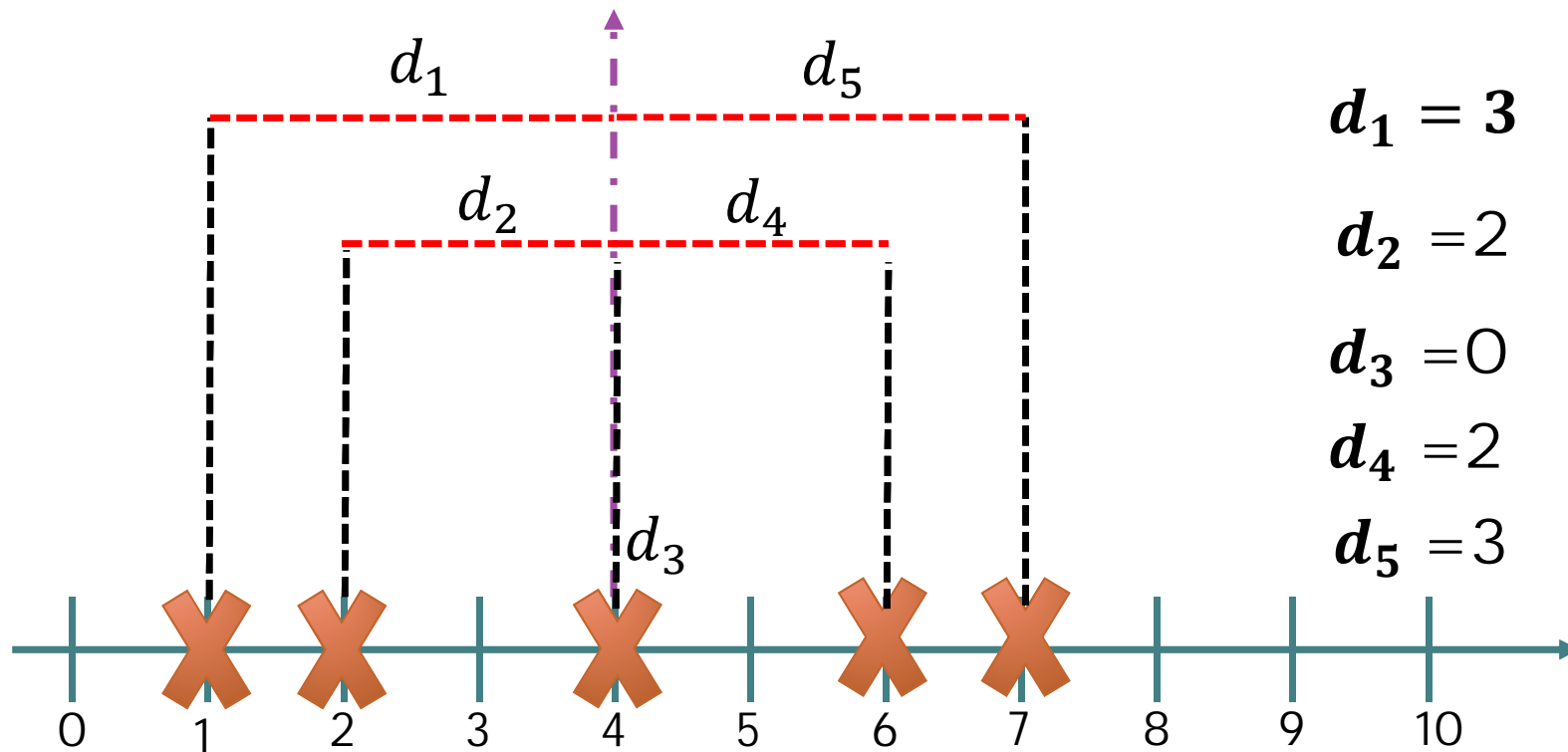
1 2 4 6 7

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 4 + 6 + 7}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

# Introdução

1 2 4 6 7

$$\bar{x} = 4$$



# Introdução

1 2 4 6 7

$$\bar{x} = 4$$

Distância Média

$$\frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5}$$

$$\frac{10}{5} = 2$$

# Introdução

1 2 4 6 7

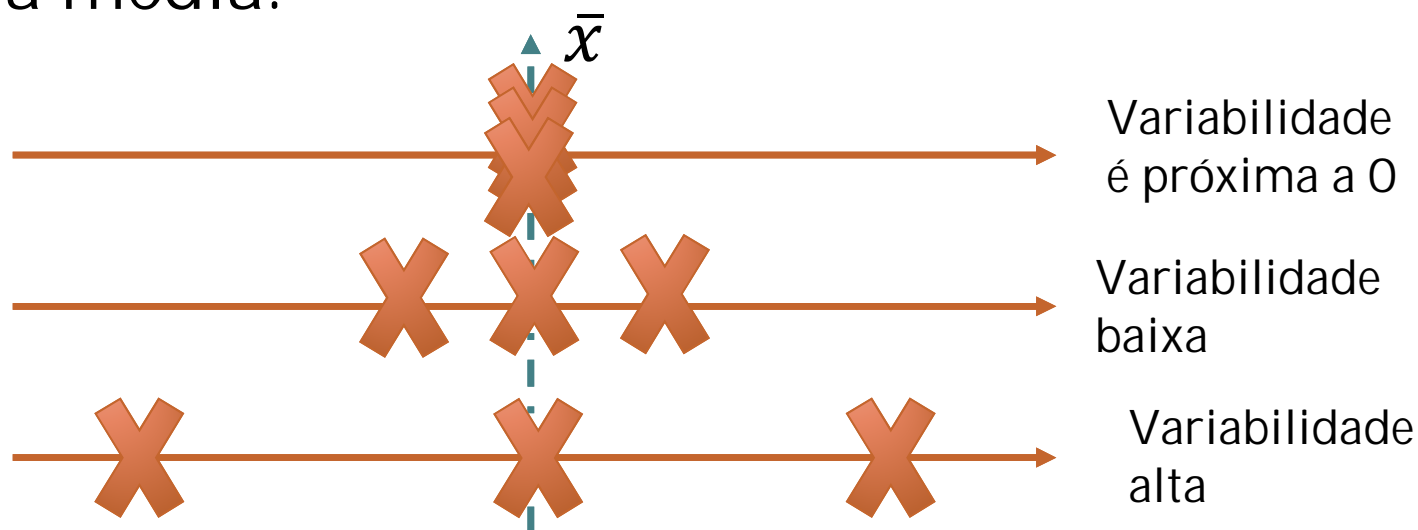
$$\bar{x} = 4$$

Distância média = 2

Distância média dos dados ( $x_i$ ) em relação a  $\bar{x}$ .

# Introdução

- Ele diz o quanto os meus valores ou dados observados estão afastados em relação a média.
- O quanto os valores observados oscilam em torno da média.





# Amplitude

- É diferença entre o maior e o menor valor observado.

$$A_T = X_{max} - X_{min}$$

# Amplitude

Empleado A: 70, 71, 69, 70, 70  $\rightarrow \bar{x} = 70$

Empleado B: 60, 80, 70, 62, 83  $\rightarrow \bar{x} = 71$

Empleado A:  $71 - 69 = 2$

Empleado B:  $83 - 60 = 23$



# Amplitude

- Indicador simples (com dois valores).
- Calculo fácil e rápido.
- Não apresenta uma precisão.
- Compreensão popular (Ex. temperatura).

# Variância

- Apresenta uma noção de distância até o valor central.

Empregado A: 70, 71, 69, 70, 70  $\rightarrow \bar{x} = 70$

$N=5$

$N - 1 = 4$

$$S^2 = \frac{(70-70)^2 + (71-70)^2 + (69-70)^2 + (70-70)^2 + (70-70)^2}{4}$$

# Variância

- Observação com relação a população x amostra, respectivamente.

$$\sigma^2 = \sum \frac{fi(x - \bar{x})^2}{N}$$

$$s^2 = \sum \frac{fi(x - \bar{x})^2}{N - 1}$$

# Variância para dados agrupados

| Notas  | $f$ | $x$ | $x * f$ | $(x - \bar{x})^2 f$ |
|--------|-----|-----|---------|---------------------|
| 0 a 2  | 10  | 1   | 10      | 140,625             |
| 2 a 4  | 6   | 3   | 18      | 18,375              |
| 4 a 6  | 9   | 5   | 45      |                     |
| 6 a 8  | 9   | 7   | 63      |                     |
| 8 a 10 | 6   | 9   | 54      |                     |
| Total  | 40  |     | 190     | 313,5               |

Ponto médio

$$\bar{x} = \frac{xf}{f} = \frac{190}{40} = \mathbf{4,75}$$

$$\text{Ex.: } (8+10)/2=9$$

## Variância para dados agrupados

$$\theta^2 = \sum \frac{fi(x - \bar{x})^2}{N}$$

$$\theta^2 = \frac{313,5}{40} = 7,84$$



# Variância

- Média aritmética dos desvio ao quadrado.
- Variância de uma constante é igual a zero.
- Leva em consideração todos os valores.
- Indicador bastante utilizado.



# Desvio padrão

- Calcula a raiz quadrada da variância.

$$\theta^2 = \frac{313,5}{40} = 7,84$$

$$\theta = \sqrt{\theta^2} = 2,8$$

# Desvio padrão

- Capaz de identificar o erro em torno da média.
- O grupo que tiver o menor desvio padrão é o melhor para se trabalhar.



# Desvio padrão

Seg = 60  
Ter = 70  
Qua = 40  
Qui = 40  
Sex = 15



Seg = 20  
Ter = 25  
Qua = 25  
Qui = 15  
Sex = 20



Tempo de caminhada de segunda a sexta  
(5 dias)

# Desvio padrão

Média = 45  
Var = 360



Média = 21  
Var = 14



Tempo de caminhada de segunda a sexta  
(5 dias)

# Desvio padrão

Desvio = 18,97



Desvio = 3,74



$$\bar{x} \pm \text{Desvio Padrão}$$

Tempo de caminhada de segunda a sexta  
(5 dias)

# Desvio padrão

$45 \pm 18,97$



$21 \pm 3,74$



$\bar{x} \pm \text{Desvio Padrão}$

Tempo de caminhada de segunda a sexta  
(5 dias)

# Desvio padrão

$45 \pm 18,97$



$21 \pm 3,74$



$\bar{x} \pm \text{Desvio Padrão}$

Dados da mulher é mais constante que do homem

# Coeficiente de variação

- Ela apresenta a dispersão em termos relativo.
- Analisar o resultado em porcentagem.





# Coeficiente de variação

- Peso de 30 professores da Universidade.
- Altura de 30 funcionários de uma Indústria.



# Coeficiente de variação

- $CV < 15\%$  = Dispersão baixa.
- Dados homogêneos.
- Resultado bem representado em torno da média.



# Coeficiente de variação

- $15\% \leq CV < 30\%$  = Dispersão média.
- Dados neutros.
- Resultado regular em torno da média.



# Coeficiente de variação

- $CV \geq 30\%$  = Dispersão alta.
- Dados heterogêneos.
- Resultado ruim em torno da média.



Quanto mais próximo a zero o resultado está bem melhor representado

# Coeficiente de variação

$$CV = \frac{\theta}{\bar{x}} * 100$$



# Coeficiente de variação

- O CV do Peso de 30 professores da Universidade.
- O CV da Altura de 30 funcionários de uma Indústria.



# Coeficiente de variação

- Calcular a média
- Desvio padrão populacional.



# Coeficiente de variação

- Peso (Kg)
- $84,74 \pm 18,97$  Kg
- Altura (m)
- $1,75 \pm 0,16$ m





# Coeficiente de variação

- Peso (Kg)

$$CV = \frac{18,97}{84,73} * 100 = 22,38\%$$



# Coeficiente de variação

- Altura (m)

$$CV = \frac{0,16}{1,77} * 100 = 9,26\%$$



# Coeficiente de variação

- Peso (Kg) = 22,38%

Os dados não são homogêneos, nem heterogêneos.  
Portanto, o resultado em torno da média é regular.



# Coeficiente de variação

- Altura (m) = 9,26%

Os dados são homogêneos.  
Portanto, o resultado está bem representado em  
torno da média



# Coeficiente de variação

R\$ 10,00



R\$ 2,00

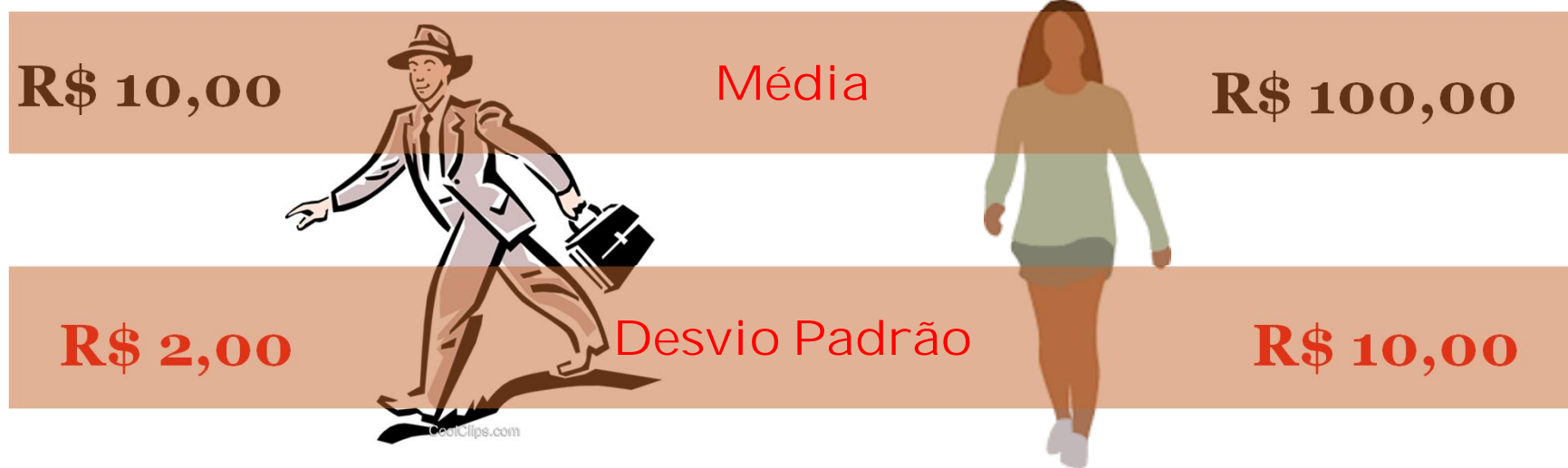
R\$ 100,00



R\$ 10,00

Quem perdeu mais dinheiro?

# Coeficiente de variação



$$\frac{2}{10} = 0,2 \times 100 = 20\%$$

$$\frac{10}{100} = 0,1 \times 100 = 10\%$$

# Exemplo 1

Dado as notas 2, 8, 5 e 6 obtidas por 4 candidatos a vaga de emprego. Calcule o desvio padrão, considerando-se uma população.

$$(Média população)\mu = \frac{2 + 8 + 5 + 6}{4} = 5,25$$

$$\sigma^2 = \frac{1 \cdot (2 - 5,25)^2 + 1 \cdot (8 - 5,25)^2 + 1 \cdot (5 - 5,25)^2 + (6 - 5,25)^2}{4}$$

$$(Variância)\sigma^2 = 4,6875$$

# Exemplo 1

Dado as notas 2, 8, 5 e 6 obtidas por 4 candidatos a vaga de emprego. Calcule o desvio padrão, considerando-se uma população.

*Desvio Padrão*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{4,6875}$$

$$\sigma = 2,17$$



## Exemplo 2

Encontre o desvio padrão da série, considerando-se uma população.

| $X_i$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 8     |
| 5     | 4     |
| Total | 20    |

## Exemplo 2

Encontre a média

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i * x_i}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{3.2 + 5.3 + 8.4 + 4.5}{20} = 3,65$$

| $X_i$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 8     |
| 5     | 4     |
| Total | 20    |

## Exemplo 2

Encontre a média

$$\sigma^2 = \sum \frac{f_i(x - \bar{x})^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{3 \cdot (2 - 3,65)^2 + 5 \cdot (3 - 3,65)^2 + 8 \cdot (4 - 3,65)^2 + 4 \cdot (5 - 3,65)^2}{20}$$

$$\sigma^2 = 0,9275$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 0,96$$

| $X_i$ | $f_i$ |
|-------|-------|
| 2     | 3     |
| 3     | 5     |
| 4     | 8     |
| 5     | 4     |
| Total | 20    |

## Exemplo 3

Calcule o desvio padrão da série, representativa de uma amostra.

| Classe   | $f_i$ | $x_i$ (ponto médio) |
|----------|-------|---------------------|
| 0 -- 4   | 1     | 2                   |
| 4 -- 8   | 3     | 6                   |
| 8 -- 12  | 5     | 10                  |
| 12 -- 16 | 1     | 14                  |
| Total    | 10    | -                   |

## Exemplo 3

Calcule o desvio padrão da série, representativa de uma amostra.

$$\bar{x} = \frac{1.2 + 3.6 + 5.10 + 1.14}{10} = 8,4$$

| Classe   | fi | xi (ponto médio) |
|----------|----|------------------|
| 0 -- 4   | 1  | 2                |
| 4 -- 8   | 3  | 6                |
| 8 -- 12  | 5  | 10               |
| 12 -- 16 | 1  | 14               |
| Total    | 10 | -                |

## Exemplo 3

Calcule o desvio padrão da série, representativa de uma amostra.

$$\bar{x} = \frac{1.2 + 3.6 + 5.10 + 1.14}{10} = 8,4$$

| Classe   | fi | xi (ponto médio) |
|----------|----|------------------|
| 0 -- 4   | 1  | 2                |
| 4 -- 8   | 3  | 6                |
| 8 -- 12  | 5  | 10               |
| 12 -- 16 | 1  | 14               |
| Total    | 10 | -                |

## Exemplo 3

Calcule o desvio padrão da série, representativa de uma amostra.

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

| Classe   | fi | xi (ponto médio) |
|----------|----|------------------|
| 0 -- 4   | 1  | 2                |
| 4 -- 8   | 3  | 6                |
| 8 -- 12  | 5  | 10               |
| 12 -- 16 | 1  | 14               |
| Total    | 10 | -                |

## Exemplo 3

Calcule o desvio padrão da série, representativa de uma amostra.

$$s^2 = \frac{1 \cdot (2 - 8,4)^2 + 3 \cdot (6 - 8,4)^2 + 5 \cdot (10 - 8,4)^2 + 1 \cdot (14 - 8,4)^2}{10 - 1}$$

$$s^2 = 11,3778$$

$$s = \sqrt{s^2} = 3,37$$

| Classe   | fi | xi (ponto médio) |
|----------|----|------------------|
| 0 -- 4   | 1  | 2                |
| 4 -- 8   | 3  | 6                |
| 8 -- 12  | 5  | 10               |
| 12 -- 16 | 1  | 14               |
| Total    | 10 | -                |



## Exemplo 4

Em 120 experimentos, onde cada um consiste em lançar 3 moedas e contar o número de caras, obtivemos o seguinte resultado.

| $f_i$ | Nº caras           | 0  | 1  | 2  | 3  |
|-------|--------------------|----|----|----|----|
| $x_i$ | Nº de experimentos | 18 | 40 | 49 | 13 |

Calcular a média, a variância e o desvio padrão do número de caras observado no experimento.

## Exemplo 4

| $f_i$ | Nº caras           | 0  | 1  | 2  | 3  |
|-------|--------------------|----|----|----|----|
| $x_i$ | Nº de experimentos | 18 | 40 | 49 | 13 |

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{18 \cdot 0 + 40 \cdot 1 + 49 \cdot 2 + 13 \cdot 3}{120} = 1,475$$

## Exemplo 4

| $f_i$ | Nº caras           | 0  | 1  | 2  | 3  |
|-------|--------------------|----|----|----|----|
| $x_i$ | Nº de experimentos | 18 | 40 | 49 | 13 |

$$\bar{x} = \frac{18 \cdot 0 + 40 \cdot 1 + 49 \cdot 2 + 13 \cdot 3}{120} = 1,475$$

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

## Exemplo 4

| $f_i$ | Nº caras           | 0  | 1  | 2  | 3  |
|-------|--------------------|----|----|----|----|
| $x_i$ | Nº de experimentos | 18 | 40 | 49 | 13 |

$$s^2 = \frac{18 \cdot (0 - 1,475)^2 + 40 \cdot (1 - 1,475)^2 + 49 \cdot (2 - 1,475)^2 + 13 \cdot (3 - 1,475)^2}{120 - 1}$$

$$s^2 = 0,7725$$

$$s = 0,88$$

# Aprendizagem

| Salários mensais (R\$) | $f_i$ | $x_i = \frac{L_i - L_L}{2}$ | $x_i \cdot f_i$ | $(x_i - \bar{x})$ | $(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$ |
|------------------------|-------|-----------------------------|-----------------|-------------------|-------------------------------|
| 150 -- 154             | 4     |                             |                 |                   |                               |
| 154 -- 158             | 9     |                             |                 |                   |                               |
| 158 -- 162             | 11    |                             |                 |                   |                               |
| 162 -- 166             | 8     |                             |                 |                   |                               |
| 166 -- 170             | 5     |                             |                 |                   |                               |
| 170 -- 174             | 3     |                             |                 |                   |                               |
| Total                  | 40    |                             |                 |                   |                               |

## Exemplo 5

Encontre o coeficiente de variação do conjunto:

-7    4    0    3    8    10

$$\bar{x} = 3$$

$$s^2 = \frac{(7 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (0 - 3)^2 + (8 - 3)^2 + (10 - 3)^2}{6} = 30,67$$

$$s = 5,54$$

## Exemplo 5

Encontre o coeficiente de variação do conjunto:

-7    4    0    3    8    10

$$\bar{x} = 3$$

$$s^2 = 30,67$$

$$s = 5,54$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5,54}{3} = 184\%$$

## Exemplo 6

Em uma escola, a direção decidiu observar a quantidade de alunos que apresentam todas as notas acima da média em todas as disciplinas. Para analisar melhor, a diretora Ana resolveu montar uma tabela com a quantidade de notas “azuis/boas” em uma amostra de quatro turmas ao longo de um ano. Calcule a variância e do desvio padrão das amostras.



## Exemplo 6

| Turmas | Quantidade de alunos acima da média |       |       |       |
|--------|-------------------------------------|-------|-------|-------|
|        | 1º Bi                               | 2º Bi | 3º Bi | 4º Bi |
| 6º ano | 5                                   | 8     | 10    | 7     |
| 7º ano | 8                                   | 6     | 6     | 12    |
| 8º ano | 11                                  | 9     | 5     | 10    |
| 9º ano | 8                                   | 13    | 9     | 4     |

## Exemplo 6

$$6^{\circ} \rightarrow \bar{x} = 7,50$$

$$7^{\circ} \rightarrow \bar{x} = 8,00$$

$$8^{\circ} \rightarrow \bar{x} = 8,75$$

$$9^{\circ} \rightarrow \bar{x} = 8,50$$

## Exemplo 6

$$6^{\circ} \rightarrow \text{var} = \frac{(5 - 7,50)^2 + (8 - 7,50)^2 + (10 - 7,50)^2 + (7 - 7,50)^2}{4 - 1}$$

$$6^{\circ} \rightarrow \text{var} = 4,33$$

$$7^{\circ} \rightarrow \text{var} = 8$$

$$8^{\circ} \rightarrow \text{var} = 6,91$$

$$9^{\circ} \rightarrow \text{var} = 13,66$$

## Exemplo 6

Conhecida a variância de cada turma, vamos calcular agora o desvio padrão:

$$6^{\circ} \text{ ano } dp = \sqrt{4,33} = 2,08$$

$$7^{\circ} \text{ ano } dp = \sqrt{8,00} = 2,83$$

$$8^{\circ} \text{ ano } dp = \sqrt{6,91} = 2,63$$

$$9^{\circ} \text{ ano } dp = \sqrt{13,66} = 3,70$$

## Exemplo 6

Para concluir sua análise, a diretora pode apresentar os seguintes valores:

- 6° ano:  $7,50 \pm 2,08$  alunos acima da média por bimestre;
- 7° ano:  $8,00 \pm 2,83$  alunos acima da média por bimestre;
- 8° ano:  $8,75 \pm 2,63$  alunos acima da média por bimestre;
- 9° ano:  $8,50 \pm 3,70$  alunos acima da média por bimestre;

## Exemplo 7

Compare a variabilidade relativa do tempo de reação de um analgésico A com a variabilidade do peso das pessoas que se submeteram à dosagem desse analgésico. As médias e os desvios padrão foram:

Analgésico A:  $\bar{x} = 3\text{min}$     $s = 0,71$

Peso das Pessoas:  $\bar{x} = 58,25\text{kg}$   
 $s = 5,17$

## Exemplo 7

Solução: Vamos calcular o coeficiente de variação para cada item observado.

- Cálculo para o tempo de reação do analgésico:

$$cv = 100 \frac{0,71}{3} = 23,67\%$$

## Exemplo 7

Solução: Vamos calcular o coeficiente de variação para cada item observado.

- Cálculo para o peso das pessoas:

$$cv = 100 \frac{5,17}{3} = 8,88\%$$



## Exemplo 7

Comparando o coeficiente de variação do tempo de reação do analgésico e o do peso das pessoas, podemos concluir que os dados referentes ao peso são mais consistentes que os dados referentes ao tempo de reação do analgésico, ou ainda, que os dados referentes ao peso são mais homogêneos que os do tempo de reação do analgésico.

## Exemplo 8

Encontre a variância e o desvio padrão das amostras

| Valores $x_i$ de X<br>(anos) | Ponto médio<br>da classe | $f_i$     |
|------------------------------|--------------------------|-----------|
| 20  – 30                     | 25                       | 2         |
| 30  – 40                     | 35                       | 11        |
| 40  – 50                     | 45                       | 10        |
| 50  – 60                     | 55                       | 9         |
| 60  – 70                     | 65                       | 8         |
| <b>Total</b>                 |                          | <b>40</b> |

## Exemplo 8

Encontre a variância e o desvio padrão

| Valores $x_i$ de X<br>(anos) | Ponto médio<br>da classe | $f_i$     | $(x_i - \bar{X})$ |
|------------------------------|--------------------------|-----------|-------------------|
| 20  – 30                     | 25                       | 2         | -22,5             |
| 30  – 40                     | 35                       | 11        | -12,5             |
| 40  – 50                     | 45                       | 10        | -2,5              |
| 50  – 60                     | 55                       | 9         | 7,5               |
| 60  – 70                     | 65                       | 8         | 17,5              |
| <b>Total</b>                 |                          | <b>40</b> |                   |

## Exemplo 8

Encontre a variância e o desvio padrão

| Valores $x_i$ de $X$<br>(anos) | Ponto médio<br>da classe | $f_i$     | $(x_i - \bar{X})$ | $(x_i - \bar{X})^2$ |
|--------------------------------|--------------------------|-----------|-------------------|---------------------|
| 20  – 30                       | 25                       | 2         | -22,5             | 506,25              |
| 30  – 40                       | 35                       | 11        | -12,5             | 156,25              |
| 40  – 50                       | 45                       | 10        | -2,5              | 6,25                |
| 50  – 60                       | 55                       | 9         | 7,5               | 56,25               |
| 60  – 70                       | 65                       | 8         | 17,5              | 306,25              |
| <b>Total</b>                   |                          | <b>40</b> |                   |                     |

## Exemplo 8

Encontre a variância e o desvio padrão

| Valores $x_i$ de $X$<br>(anos) | Ponto médio<br>da classe | $f_i$     | $(x_i - \bar{X})$ | $(x_i - \bar{X})^2$ | $(x_i - \bar{X})^2 \cdot f_i$ |
|--------------------------------|--------------------------|-----------|-------------------|---------------------|-------------------------------|
| 20  – 30                       | 25                       | 2         | -22,5             | 506,25              | 1 012,50                      |
| 30  – 40                       | 35                       | 11        | -12,5             | 156,25              | 1 718,75                      |
| 40  – 50                       | 45                       | 10        | -2,5              | 6,25                | 62,50                         |
| 50  – 60                       | 55                       | 9         | 7,5               | 56,25               | 506,25                        |
| 60  – 70                       | 65                       | 8         | 17,5              | 306,25              | 2 450,00                      |
| <b>Total</b>                   |                          | <b>40</b> |                   |                     | <b>5 750,00</b>               |

## Exemplo 8

Encontre a variância e o desvio padrão

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1} \cdot f_i = \frac{5\,750}{39} = 147,44 \text{ anos}$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{147,44} = 12,14 \text{ anos.}$$

## Exemplo 8

Para duas emissões de ações ordinárias da farmacêutica, o preço médio diário, no fechamento dos negócios, durante um período de um mês, para as ações A, foi de R\$ 150,00 com um desvio padrão de R\$ 5,00.

Para as ações B, o preço médio foi de R\$ 50,00 com um desvio padrão de R\$ 3,00.

## Exemplo 8

Compare a variabilidade do preço das ações.

$$CV(A) = \frac{S_A}{\bar{X}_A} = \frac{5}{150} = 0,033 \text{ ou } 3,3\%$$

$$CV(B) = \frac{S_B}{\bar{X}_B} = \frac{3}{50} = 0,060 \text{ ou } 6\%$$



## Exemplo 8

Conclusão:

Portanto, relativamente ao nível médio de preços das ações, podemos concluir que o preço da ação B é quase duas vezes mais variável que o preço da ação A.