Probabilidade

Dr. NIELSEN CASTELO DAMASCENO DANTAS

AULA 9

Introdução

- Probabilidade (P) :   0 <= P <= 1
- P = 1: evento certo
- P=0: evento impossível
- Probabilidade de 50%: 0,5   /   ½
- Impossível: -0,5 /   -20%   /   2/1

Introdução

- Experimento: o que está sendo estudado
- Espaço Amostral: todas as possibilidade de ocorrência do evento
- Evento: resultados ocorridos
- Exemplo:
  - Experimento: jogar moeda
  - Espaço Amostral: cara ou coroa
  - Evento: coroa

Introdução

- Eventos Excludentes: quando não podem ocorrer ao mesmo tempo
  - Exemplo: jogar um dado e ser 1 e par
- Eventos Não Excludentes: quando podem ocorrer ao mesmo tempo
  - Exemplo: jogar um dado e ser 2 e par

Introdução

- Eventos Dependentes: A ocorrência de um evento afeta o outro. Um tem que ocorrer para depois que o outro ocorra.
- Eventos Independentes: A ocorrência de um evento não afeta o outro

Introdução

- Modelo probabilísticos
  - ✓ Risco/Chance
  - ✓ Resultados não previsto
  - ✓ Ex.: Jogos, dados, cartas
- Experimento aleatório
  - ✓ Todos os resultados são conhecidos
  - ✓ Nenhum resultado é previsto

Único evento

$$P = \frac{\text{Ocorrência Esperada}}{\text{Número de Eventos}}$$

Exemplo: Jogar uma moeda

$$p = \frac{1}{2}$$

Moeda

Jogar uma moeda e dar cara

$$p = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{Evento Esperado}}{\text{Número de Eventos}}$$

$$Espaço\ amostral = Cara\ e\ Coroa$$

Vacina

Qual o significado de dizer que a eficácia de uma vacina é de 70% ?

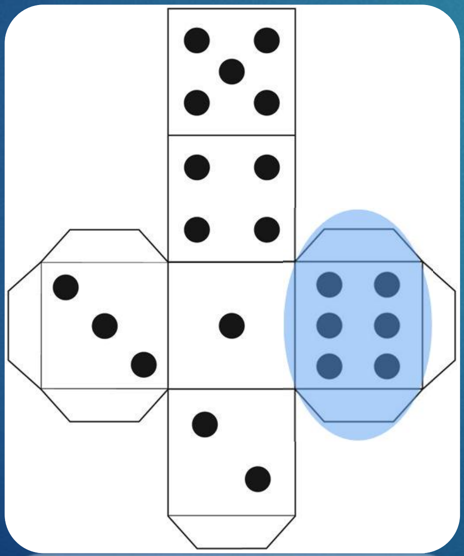
Corresponde a dizer que cada indivíduo vacinado tem probabilidade 0,7 de ficar imune.

Único evento

Jogar um dado e dar 6: P = 1/6 , P=0,16 ou 16%

$$p = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\text{Evento Esperado}}{\text{Número de Eventos}}$$

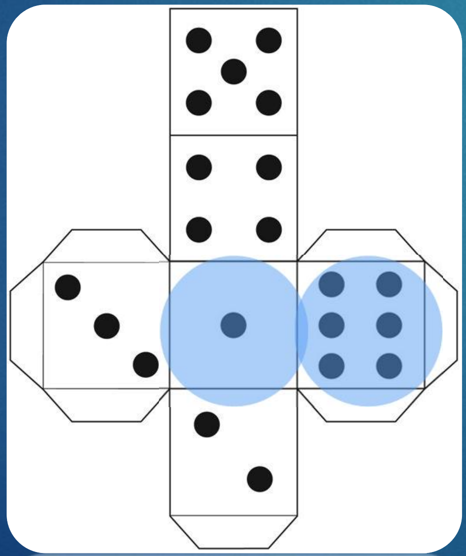


Único evento

Jogar um dado e dar 1 ou 6: P = 2/6 , P=0,33 ou 33%

Eventos não excludentes

$$\frac{\text{Evento Esperado}}{\text{Número de Eventos}}$$



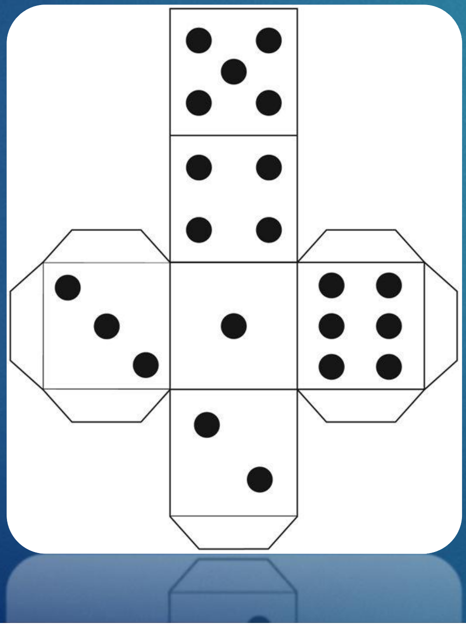
$$p = \frac{2}{6}$$

Único evento

Jogar um dado e dar 1,2,3,4,5 ou 6: P = 6/6 , P=1 ou 100%

Eventos não excludentes

$$\frac{\text{Evento Esperado}}{\text{Número de Eventos}}$$



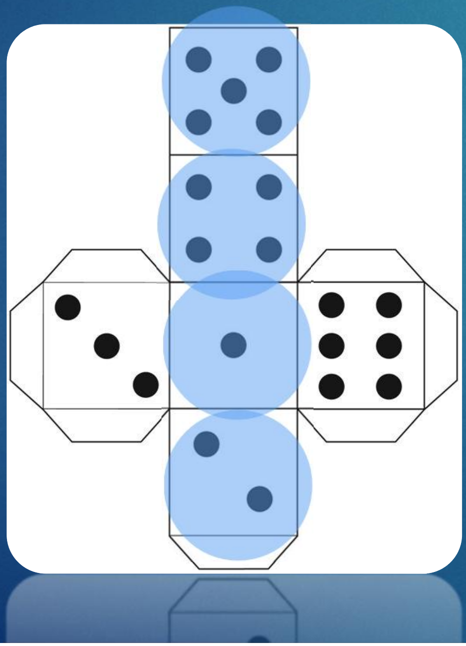
$$p = \frac{6}{6}$$

$$Espaço\ amostral = 6$$

Eventos Excludentes

Soma-se as probabilidades:

Jogar um dado e ser 1 ou par: 1/6 + 3/6 = 4/6 = 0,66



$$\frac{\text{Evento Esperado}}{\text{Número de Eventos}}$$

$$p = \frac{4}{6}$$

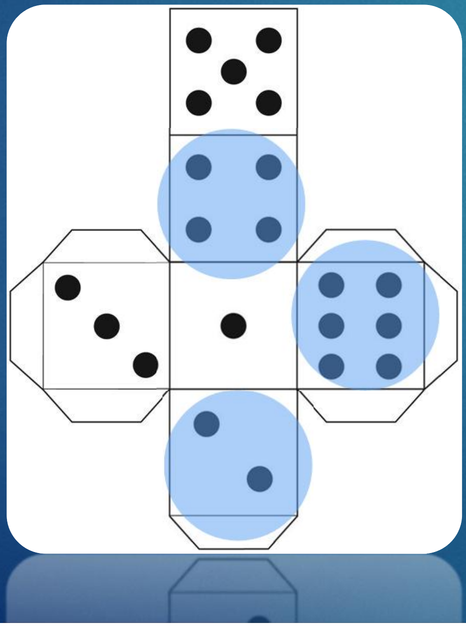
$$Espaço\ amostral = 6$$

Eventos não excludentes

Soma-se as probabilidades, diminui-se as sobreposições

Jogar um dado e ser 2 ou par:

$1/6 + 3/6 - 1/6 = 3/6 = 0{,}5$



$$\frac{\text{Evento Esperado}}{\text{Número de Eventos}}$$

$$p = \frac{3}{6}$$

$$Espaço\ amostral = 6$$

Eventos independentes

Mais de um evento, como eles se relacionam?

Multiplicação

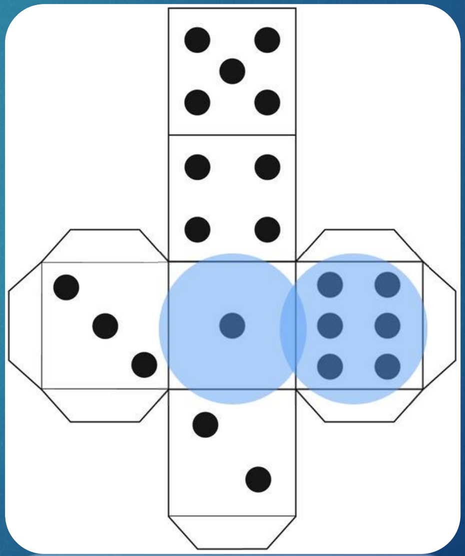
Exemplo: lançamento de dois dados, sorteio da mega sena

Eventos independentes

Qual a probabilidade de jogar dois dados, e dar 1 e 6: (dois eventos independentes)

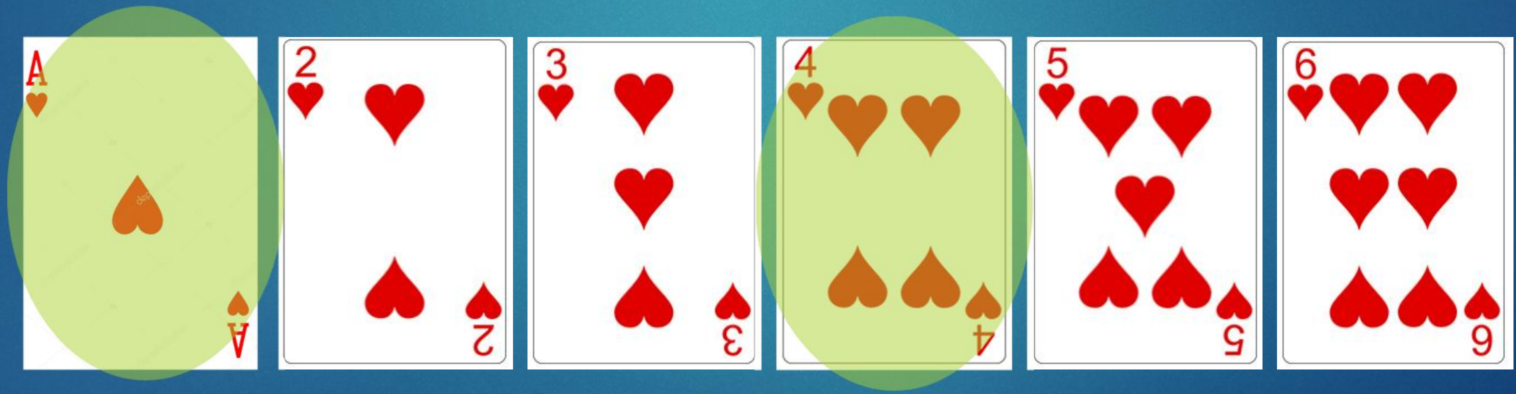
$1/6 \ast 1/6 = 1/36$

P=0,027



Eventos dependentes

Com 6 cartas na mão (A,2,3,4,5,6), qual a probabilidade de primeiro evento tirar A e no segundo evento tirar 4?



Eventos dependentes

Com 6 cartas na mão (A,2,3,4,5,6), qual a probabilidade de primeiro evento tirar A e no segundo evento tirar 4?

$$P = \frac{1}{6} * \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = 0{,}033$$

Definições matemáticas

Espaço Amostral (S)

É o conjunto de resultados possíveis, de um experimento aleatório.

Quanto ao número de elementos pode ser:

- Finito, por exemplo, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Infinito: Número ilimitado de elementos

Definições matemáticas

Evento (E)

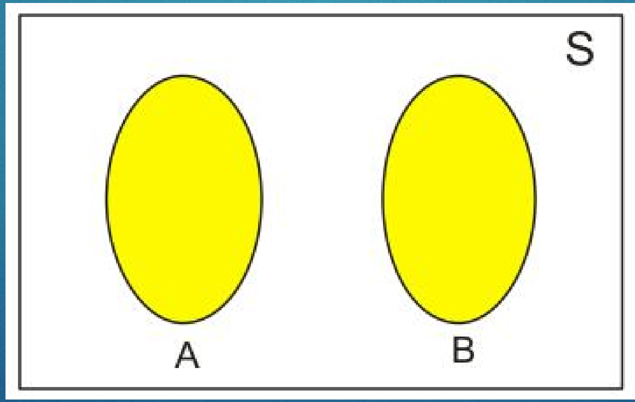
Um evento (E) é qualquer subconjunto de um espaço amostral (S).

Pode-se ter operações entre eventos da mesma forma que com conjuntos

Operações com Eventos

A união B (ideia de soma de elementos)

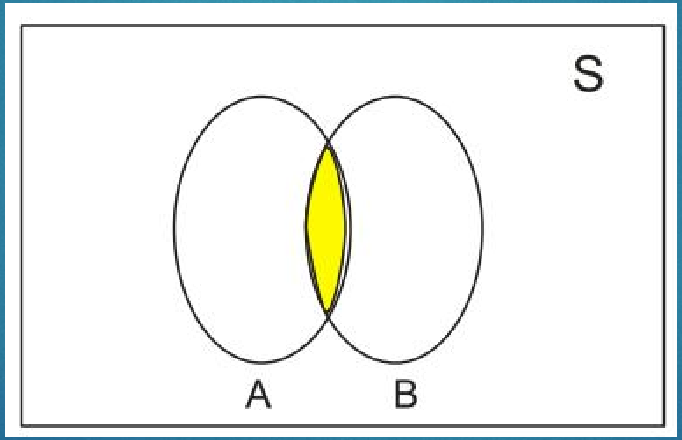
Símbolo utilizado "U", é o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B ou ambos ocorrerem;



Operações com Eventos

A interseção B (Elementos comum)

Símbolo utilizado "⋂", é o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrem simultaneamente.



Operações com Eventos

Complementar de A

Simbologia "$\bar{A}$", é o evento que ocorrerá se, e somente se A não ocorrer.

Mutuamente exclusivo

Também chamado de disjuntos

$A \cap B = 0$

Não há elementos comum entre os dois elementos.

.

Eventos dependentes

- Também conhecido como condicionado.
- Existem varias situações onde a ocorrência de um evento pode influenciar fortemente na ocorrência de outro.
- Assim, se (A) e (B) são eventos, deseja-se definir uma quantidade denominada probabilidade condicional do evento (A) dado que o evento (B) ocorre

Eventos dependentes

- Assim, se (A) e (B) são eventos, deseja-se definir uma quantidade denominada probabilidade condicional do evento (A) dado que o evento (B) ocorre

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

onde $P(B) > 0$. Se $P(B) = 0$, tem-se que $P\left(A/B\right)$ não é definida.

Eventos independentes

- Os eventos A e B são independentes quando o resultado de um não influi no resultado do outro.

- Exemplo: no lançamento simultâneo de duas moedas, o resultado de uma não interfere no resultado da outra.

Eventos independentes

- A probabilidade da ocorrência de eventos independentes é o produto das probabilidades de cada evento.

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Eventos independentes

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

P(face 2 no primeiro dado e face 3 no segundo dado), no lançamento sequencial de dois dados = P(2 e 3) = P(2)xP(3)= 1/6 x 1/6= 1/36= 0,0278= 2,78%.

Probabilidade condicional

- A probabilidade da ocorrência de um evento A ou de um evento B é:

$$P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Lê-se P(A|B) como probabilidade de A dado B. b

Probabilidade condicional

- Exemplo:

Número de adolescentes segundo história de bronquite aos 5 anos e tosse diurna ou noturna aos 14 anos de idade. Local X, ano Y.

	Bronquite		
Tosse	Sim	Não	Total
Sim	26	44	70
Não	247	1002	1249
Total	273	1046	1319

Fonte: Holland, WW *et al.*, 1978.

Probabilidade condicional

- Sorteia-se um paciente. Qual é a probabilidade dele ter tosse aos 14 anos dado que teve bronquite aos 5 anos de idade?

P(tosse | bronquite)= P(tosse e bronquite)/P(bronquite)=
26/1319 ÷ 273/1319= 9,5%

Exemplo 1

Em uma sala de aula possui 60 alunos, sendo 45 mulheres. Qual é a probabilidade do professor escolher um homem para responder no quadro branco?

Alunos = 60

Mulheres = 45

Homem = 15

$$P(H)=\frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis}=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}\ \text{ou}\ 0{,}25$$

Exemplo 1

Em uma sala de aula possui 60 alunos, sendo 45 mulheres. Qual é a probabilidade do professor escolher um mulher para responder no quadro branco?

Alunos = 60

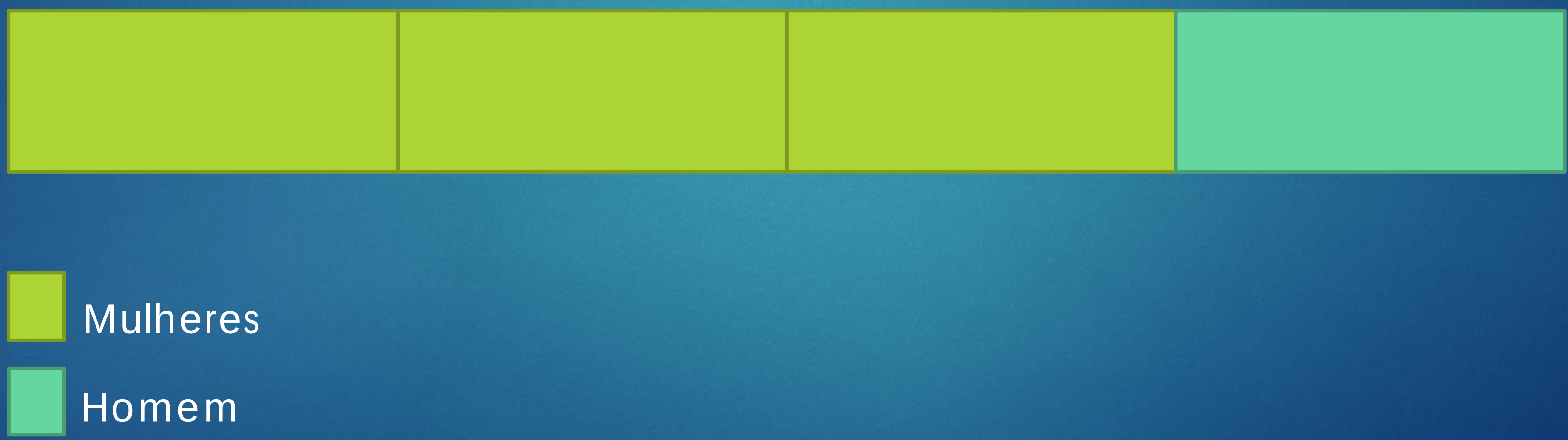
Mulheres = 45

Homem = 15

$$P(H)=\frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$ ou 0,75%

Exemplo 1

Em uma sala de aula possui 60 alunos, sendo 45 mulheres. Qual é a probabilidade do professor escolher um mulher para responder no quadro branco?



Exemplo 2

Qual a probabilidade de sortear a letra A, em uma urna que tenha todas as letras separadas e misturadas do nome Mariana?

Total de letras = 7

Total de A = 3

P(A)=$\frac{3}{7}$ ou 0,42%

Exemplo 3

Em uma central de atendimento, 100 pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Umas das senhas é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

Total de letras = 7

Total de A = 3

$$P(A)=\frac{20}{100} = 0,2 \text{ ou } 20\%$$

Exemplo 4

Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em sala de aula, serem chamados para entrevista. Mas, ao invés de chama-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

Qual a probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês?

Exemplo 4

P(Entendido)+P(Não entendido) = 100%

Logo,

P(Entendido) = 100% - P(Não entendido)

P(Entendido) = 100% - $P(70\%)^3$

P(Entendido)= 100% - 34,3%

P(Entendido)=65,7%

Exemplo 5

- Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região;
- Caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%.
- Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva na região.
- Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para qual foi dada a estimativa de chuva?

Exemplo 5

- P(Atrase e Chova ou Atrase e Não chova)
- P(50% e 30% ou 25% e 70%)

- P(Atrase e Chova ou Atrase e Não chova)
- P(0,5 e 0,3% ou 0,25 e 0,7)

- P(Atrase e Chova ou Atrase e Não chova)
- P(0,5 e 0,3 ou 0,25 e 0,7)
- P(Atrase e Chova ou Atrase e Não chova)
- P(0,5 * 0,3 + 0,25 * 0,7)

Exemplo 5

- P(Atrase e Chova ou Atrase e Não chova)
- P(0,5 * 0,3 + 0,25 * 0,7)
- P=0,325 = 32,5%